Übungen

Abgabetermin: Freitag 21.5. 10Uhr, Briefkästen 41, 42, 43 und 46

THEMEN: Produktmaße, Zufallsvariablen und Satz von Fubini

Aufgabe 17 (5 Punkte)
Es seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine nicht-negative Funktion und $M := \{(\omega, t) \in \Omega \times \mathbb{R} \mid 0 \leq t \leq f(\omega)\}$. Zeigen Sie:

a) f ist genau dann $\mathfrak{A}$-messbar, wenn $M \in \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$ gilt.

b) Ist f $\mathfrak{A}$-messbar, so gilt $\int_\Omega f d\mu = \mu \otimes \lambda\!\!\!\lambda(M)$.

Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $h : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $h(\omega, t) := f(\omega) - t$.

Aufgabe 18 (4 Punkte)
Es sei X eine P-integrierbare Zufallsgröße mit Erwartungswert $E(X) = \mu$. Zeigen Sie:

a) $E(X) = \int_0^\infty (P(X > t) - P(X < -t))dt$.

b) $Var(X) = \int_0^\infty ((2t - \mu)P(X > t) + (2t + \mu)P(X < -t))dt$.

Aufgabe 19 (6 Punkte)
Es sei (X, Y) ein Zufallsvektor auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit der $\lambda\!\!\!\lambda^2$-Dichte

$$f(x, y) = cxy\mathbb{1}_{[0,2]^2}(x, y).$$

a) Bestimmen Sie dasjenige c, für das f eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist, und zu diesem c die $\lambda\!\!\!\lambda$-Dichten der Randverteilungen P^X und P^Y, definiert durch

$$P^X(A) := P^{(X,Y)}(A \times \Omega), \quad P^Y(B) := P^{(X,Y)}(\Omega \times B), \quad A, B \in \mathfrak{A}.$$

b) Bestimmen Sie die Kovarianz $Cov(X, Y)$.

c) Zeigen Sie $P(X > Y) = \frac{1}{2}$.

Aufgabe 20 (5 Punkte)
P_1, P_2 seien Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ mit stetigen Verteilungsfunktionen F_1 und F_2. Weiter sei Q das Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$, dass die Verteilungsfunktion $F(x) := F_1(x)F_2(x)$ besitzt. Zeigen Sie für jedes $B \in \mathfrak{B}$

$$Q(B) = \int_B F_1 \, dP_2 + \int_B F_2 \, dP_1.$$

Hinweis: Zeigen Sie die Aussage zunächst für Intervalle $(a, b], a < b$, mit Hilfe des Satzes von Fubini. Betrachten Sie dazu für ein solches Intervall die Menge $\Delta := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a < x \leq y \leq b\}$. Schließen Sie daraus die Behauptung für beliebige Borel-Mengen.